

Leçon 234: Fonctions et espaces de fonction Lebesgue intégrables

I. Autours de l'intégrale

a) Fonctions mesurables $(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$ 2 espaces mesurables

Def. 1: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est dite mesurable si $\forall B \in \mathcal{B}, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
Si X, Y sont des espaces métriques munis de tribus boréliennes on parle de fonction borélienne.

Ex. 2: $A \in \mathcal{A}, 1_A$ est mesurable, les fonctions continues et constantes sont mesurables.

Prop. 3: L'ensemble des fonctions mesurables de $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K))$ muni de $+, \cdot, \times$ forme une K -algèbre.

Prop. 4: (f_n) suite de fonctions mesurables $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ alors:
- $\sup f_n$ et $\inf f_n$ mesurables - $\limsup f_n$ et $\liminf f_n$ mesurables
- (f_n) cvs vers f alors f mesurable.

Ex. 5: Si f dérivable alors f' mesurable.

b) Mesure: définition et propriétés

Def. 6: On appelle mesure sur $(X, \mathcal{A})$ toute application $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant:
- $\mu(\emptyset) = 0$ - $(A_n) \subset \mathcal{A}$ s.e.d. alors $\mu(\bigcup A_n) = \sum \mu(A_n)$
Si $\mu(X) < \infty$ on dit que μ est finie.

Ex. 7: mesure nulle, mesure gaussienne ($\mu(\emptyset) = 0$ et $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \int_A f d\mu$), mesure de Dirac, mesure de comptage.

Prop. 8: $\forall A, B \in \mathcal{A}, A \subset B$ alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. Si $\mu(A) < \infty$ alors $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

c) Définition de l'intégrale $(X, \mathcal{A}, \mu)$ espace mesuré

Def. 9: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K))$ est dite étagée si elle est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Thm. 10: Lemme fondamental de l'approximation $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ou $\mathbb{C}$ mesurable.
 $\exists (f_n)$ étagées tq $\forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.
3. $f \geq 0$ on peut prendre (f_n) croissante positive. Si f bornée, on peut prendre (f_n) tq (f_n) cvs vers f .

Def. 11: $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ $\{A_i\} \in \mathcal{A}$ étagée positive sur $(X, \mathcal{A})$, $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$.

Prop. 12: f, g étagées positives: $\forall \lambda \geq 0, \lambda f + g = \lambda f + g$, si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Def. 13: f mesurable positive, $\int f d\mu := \sup \int f_n d\mu$ f_n étagées positives $f_n \leq f$.

Thm. 16: (Beppo Levi) (f_n) mesurables, croissante, alors $\lim \int f_n d\mu = \int \lim f_n d\mu$.

Prop. 15: $f \geq 0$ mesurable, $\int f d\mu = 0$ si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Def. 16: Une proposition P_A est vraie μ -pp si $\{A \in \mathcal{A} \mid P_A \text{ fautive}\} \in \mathcal{A}$ et est de mesure nulle.

Prop. 17: $f, g \geq 0$ mesurables, si $f \leq g$ alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Prop. 18: (Inégalité de Markov) $f \geq 0$ mesurable, $\forall A \geq 0, \mu(\{f \geq A\}) \leq \frac{1}{A} \int f d\mu$.

Def. 19: $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K))$ est dite μ -intégrable si $\int |f| d\mu < \infty$. On note $\mathcal{L}_K^1(\mu) = \{f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow K, \mathcal{B}(K) \text{ mesurables}, \int |f| d\mu < \infty\}$.

Rmq. 20: Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, puisque $|f| = f^+ + f^-$ on a $f \in \mathcal{L}_K^1$ si $f^+ \in \mathcal{L}_K^1$.
Si f est à valeur dans $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{L}_K^1$ si $\operatorname{Re}(f) \in \mathcal{L}_K^1$ et $\operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}_K^1$.

Def. 21: Si $f \in \mathcal{L}_K^1$, on pose $\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$. Si $f \in \mathcal{L}_K^1$ $\int f d\mu = \int \operatorname{Re}(f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(f) d\mu$.

Thm. 22: $\mathcal{L}_K^1(\mu)$ est un K -ev et $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire positive.

Thm. 23: (Lien avec l'intégrale de Riemann) Soit f Riemann intégrable sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$, alors $\exists g \in \mathcal{L}_K^1([a, b])$ Lebesgue-intégrable tq $g \equiv f$ et $\int_a^b f = \int_a^b g$ + précis avec intégrales impropres.

Rmq. 24: Il est important de se placer sur un intervalle borné, sinon le résultat peut être faux.

Ex. 25: $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est Riemann-intégrable sur $[0, +\infty[$, mais pas Lebesgue intégrable (car l'intégrale diverge en valeur absolue).

Ex. 26: $1_{\mathbb{Q} \cap [0, 1]}$ est Lebesgue intégrable mais pas Riemann intégrable.

II. Théorèmes principaux

a) Lemme de Fatou et convergence dominée

Thm. 27: (Lemme de Fatou) Soient $(f_n) \geq 0$ mesurables alors
 $0 \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \int \liminf f_n d\mu \leq +\infty$

Ex. 28: (Cas d'égalité stricte). $A \in \mathcal{A}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = 1_A$.

Thm. 28: (convergence dominée) $(f_n) \subset \mathcal{L}_K^1$ tq (f_n) cvs p.s. f et $\exists g \in \mathcal{L}_K^1$ tq $|f_n| \leq g$ alors $\int \lim f_n d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

[UNIV]
p. 246

Rmq. 30: De ce théorème on peut déduire un théorème d'inversion série intégrale.

C-ec. 31: Soit $f_m: x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} m^2 x & 0 \leq x \leq \frac{1}{m} \\ -m^2 x + 2 & \frac{1}{m} < x \leq \frac{2}{m} \end{cases}$ (voir annexe)
 $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 f_m(t) dt = 1 \neq 0 = \int_0^1 f(t) dt$
 $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m \equiv 0$

b) Intégrales à paramètre. (E, d) métrique, $u, v \in E$, $f: (x, y) \rightarrow K$

Thm 32: (Continuité sous le signe intégrale) Si:

- $\forall u \in E, x \mapsto f(u, x)$ est mesurable de $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K))$
- $u \mapsto f(u, x)$ est p.p continue en u .
- $\exists g \in L^1_K$ tq $\forall u \in E, |f(u, x)| \leq g(x)$ pour presque tout x .

Alors $F(u) := \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est continue en u (et est définie $\forall u \in E$)

Ex. 33: $u \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$ ($f \in L^1_K, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) est continue en tout point de $\mathbb{R}$
 $= \int_{\mathbb{R}} f(x) dx$

Thm 34: (Dérivation sous le signe intégrale) $E = \mathbb{R}$ intervalle non vide de $\mathbb{R}$

- Si f vérifie: • $\forall u \in I, f(u, \cdot) \in L^1_K$ • p.p.p. $\frac{\partial f}{\partial u}(u, x)$ existe
- $\exists g \in L^1_K$ tq $\forall u \in I, \left| \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) \right| \leq g(x)$

Alors, $F(u) := \int_X f(u, x) d\mu(x)$ est définie dérivable sur tout I et
 $F'(u) = \int_X \frac{\partial f}{\partial u}(u, x) d\mu(x)$.

Ex. 35: $\forall \epsilon > 0, \Gamma(\epsilon) = \int_0^\infty x^{\epsilon-1} e^{-x} dx$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}^+$

Thm. 36: (Holomorphie sous le signe intégrale) $E = W$ ouvert de $\mathbb{C}$.

- Si $f: w \mapsto \int_X f(w, x) d\mu(x)$ vérifie: • $\forall z \in W, x \mapsto f(z, x)$ est intégrable
- pour presque tout $x, z \mapsto f(z, x)$ est holomorphe sur W
- pour tout $z \in W$ et g intégrable positive tq $|f(z, x)| \leq g(x)$ $\forall x$

Alors $F(z) = \int_X f(z, x) d\mu$ est holomorphe sur W et $F'(z) = \int_X \frac{\partial f}{\partial z}(z, x) d\mu$.

Ex. 37: Γ est holomorphe sur $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

c) Théorèmes de Fubini

Thm 38: (Fubini-Tonelli) $f: (X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ mesurable

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$ sont resp. $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ mesurables
- $\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$

Thm 39: (Fubini-Lebesgue) Si $f \in L^1_K$ alors: - Pour p.p. $x, y \mapsto f(x, y) \in L^1_K(\mu)$

- Pour p.p. $y, x \mapsto f(x, y) \in L^1_K(\mu)$

- $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\mu(y) \in L^1_K(\nu)$ et $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x) \in L^1_K(\nu)$ définies μ -p.p.

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu(y) \right) d\nu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

$$\text{Ex. 40: } f(x, y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}, \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} f \neq \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} f$$

III. Espaces L^p

a) Définitions et premières propriétés

Def. 41: $L^p(\mu) := \{f: (X, d) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K)) \mid \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$, $f \in L^p, \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$
 (peut ∞ , pour $p=1$ coïncident avec L^1 de Def. 13)

Def. 42: $f: (X, d) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\operatorname{supp}(f) := \inf\{M > 0 \mid \mu(\{f > M\}) = 0\}$. Posons
 $\|f\|_0 = \operatorname{supp}(f)$ et $L^\infty(\mu) := \{f: (X, d) \rightarrow (K, \mathcal{B}(K)) \mid \|f\|_0 < \infty\}$

Def. 43: $L^p := L^p_{\mu}$, $p \in [1, \infty)$

Prop. 44: Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ conjugués ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

- (Hölder) $\forall f, g \in L^p \times L^q, \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$

- Minkowski $\forall f, g \in L^p, \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Prop. 45: Pour tout $1 \leq p \leq \infty, (L^p, \|\cdot\|_p)$ est K -evm.

Prop. 46: (Riesz-Fischer) Pour tout $1 \leq p \leq \infty, (L^p, \|\cdot\|_p)$ est complet

Prop. 47: L^2 muni de $\langle f, g \rangle := \int_X fg d\mu$ est un Hilbert

b) Résultats de densité

Prop. 48: $1 \leq p < \infty$ l'ensemble des fonctions étagées intégrables est dense dans L^p

Prop. 49: $1 \leq p < \infty, C_K(\mathbb{R}, K)$ (continue support compact) est dense dans L^p

Prop. 50: L'ensemble des fonctions étagées est dense dans L^∞

Rmq. 51: C et D des ensembles. Si C est $\|\cdot\|_p$ -dense dans D et D $\|\cdot\|_p$ -dense dans L^p tq $C \subset D \subset L^p$, alors C est dense dans L^p .

[BRI]
p. 160
144

[BRI]
p. 152

[QUE]
p. 314

[QUE]
p. 318

[BRI]
p. 235
- 238

[BRI]
p. 151-153

[BRI]
p. 175

[BRI]
p. 184-186

[RVD]
p. 84-83

DEV1

[BRI]
p. 190

[BRI]
p. 170
171

[BRI]
p. 178

[BRI]
p. 170

IV Applications On note $L^p = L^p_{\mathbb{R}}$

a) Convolution: définition et premières propriétés

Def. 52: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si pour $x \in \mathbb{R}$ $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ alors $\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$ est appelé produit de convolution de f et g en x . On $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)dt$

Prop. 53: $f, g \in L^1$, $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ • $f \in L^\infty, g \in L^1$ $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$
• f bornée sur tout compact et g à support compact $f * g$ définie sur $\mathbb{R}$

Prop. 54: $\forall f, g \in L^p, L^q$ $x \mapsto (f * g)(x)$ est uniformément continue et bornée par $\|f\|_p \|g\|_q$

Rmq. 55: $f * g = g * f$

Thm. 56: (Dérivation) $k \in \mathbb{N}, f \in C^k, g \in L^1$ à support compact alors $\forall d \in \{0, \dots, k\}$, $(f * g)^{(d)} \in C^k$ et $D^d(f * g) = (D^d f) * g$.

Prop. 57: Soient f, g tq $f * g$ existe. $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$
Si f, g à support compact alors $f * g$ aussi.

Def. 58: $\alpha \in \mathbb{R}, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bornée on définit $Z_\alpha f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x-\alpha)$
Thm 59: Si $f^{(p)} = g$ alors $Z_\alpha f^{(p)} = Z_\alpha g$ • $\forall p \in \mathbb{Z}, +\infty, \forall f \in L^1$ $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \|Z_\alpha f - f\|_1 = 0$
 $\forall p \in \mathbb{Z}, +\infty, \forall f \in L^p$ $\alpha \mapsto Z_\alpha f$ est uniformément continue.

b) Approximation de l'unité

Def. 60: $(\phi_n) \subset L^1$ est une approximation de l'unité si:
• $\forall n \geq 1 \int_{\mathbb{R}} \phi_n d\mu = 1$ • $\sup_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} |\phi_n| d\mu < \infty$ • $\forall \varepsilon > 0, \int_{|x| \geq \varepsilon} |\phi_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Rmq 61: En pratique on considère $(\phi_n) \subset C_c^\infty$ et le 3ème point devient $\varepsilon > 0$

Exemple 62: Noyau de Laplace $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{|x|}{\varepsilon}}, \varepsilon > 0$

Rmq. 63: À toute fonction $\alpha \in C_c(\mathbb{R})$ tq $\int \alpha = 1$ on peut associer le noyau $\forall \varepsilon > 0 \phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \alpha(\frac{x}{\varepsilon})$ (noyau à support compact)

Def. 64: (ϕ_n) est dite régularisante si:
• ϕ_n est une approximation de l'unité et si $\forall n \geq 1 \phi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

Lemme 65: $\exists p \in C^\infty(\mathbb{R})$ tq $p \geq 0$, $\text{supp}(p) \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$ et $\int p = 1$
(Pontryagin 2)

Ex. 66: D'après rmq 63, $\phi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} p(\frac{x}{\varepsilon})$ alors ϕ_ε est régularisante

Lemme 67: $1 \leq p < \infty, L^p$ est dense dans L^p

Lemme 68: Si $f \in L^p$ alors $\phi_\varepsilon * f \rightarrow f$ vers $f \in L^p$ (on munit $\|\cdot\|_p$)

Thm 69: $1 \leq p < \infty, C_c^\infty$ est dense dans L^p

c) Analyse de Fourier

Def. 70: $f \in L^1_{\mathbb{R}}$, on appelle transformée de Fourier de f $\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx$
 $\mathcal{F}: f \in L^1 \rightarrow \hat{f}$ est appelée transformation de Fourier.

Lemme 71: (Riemann Lebesgue) $\forall f \in L^1$ $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$

Thm 72: $\forall f \in L^1, \hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est continue bornée pour $\|f\|_1$

Prop. 72: $\forall f, g \in L^1$ $\widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$

Thm 73: La transformation de Fourier est linéaire, continue, injective.

+ thm dérivation par T.F

[QUE]
p. 329
- 332

DEV 2

[ELAM]
p. 103-